



Ingenieurmathematik III

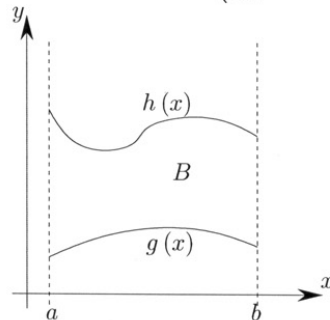
1. Beiblatt

Berechnung von Gebietsintegralen

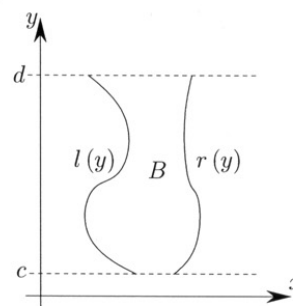
Gebietsintegrale über Normalbereiche berechnen sich wie folgt:

$$\iint_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad \text{Normalbereich vom Typ I}$$

$$\iint_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{r(y)} f(x, y) \, dx \right) dy \quad \text{Normalbereich vom Typ II}$$



Normalbereich Typ I

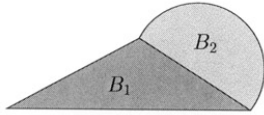


Normalbereich Typ II

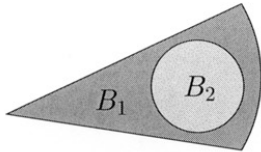
Gehen Sie bei einer solchen Integrationsaufgabe wie folgt vor:

1. Skizzieren Sie den Integrationsbereich B .
2. Entscheiden Sie, ob Sie B als Normalbereich Typ I oder II darstellen können, ggf. durch Zerlegung in Teilbereiche.
3. Stellen Sie die Berandungsfunktionen $g(x)$, $h(x)$ (Typ I) bzw. $l(y)$, $r(y)$ (Typ II) und die Grenzen (a, b) bzw. (c, d) auf.
4. Berechnen Sie die Integrale wie gewohnt (zuerst das innere).

Rechenregeln



$$\iint_{B_1 \cup B_2} f(x, y) \, d(x, y) = \iint_{B_1} f(x, y) \, d(x, y) + \iint_{B_2} f(x, y) \, d(x, y)$$



$$\iint_{B_1 \setminus B_2} f(x, y) \, d(x, y) = \iint_{B_1} f(x, y) \, d(x, y) - \iint_{B_2} f(x, y) \, d(x, y)$$

Anwendungen in der Mechanik

Statt $d(x, y)$ schreibt man häufig dA !

Fläche: $A = \iint_B 1 \, d(x, y)$

Flächenschwerpunkt: $x_S = \frac{1}{A} \iint_B x \, d(x, y) \quad y_S = \frac{1}{A} \iint_B y \, d(x, y)$

axiale Flächenträgheitsmomente: $I_{xx} = \iint_B y^2 \, d(x, y) \quad I_{yy} = \iint_B x^2 \, d(x, y)$

Flächendeviationsmoment: $I_{xy} = \iint_B xy \, d(x, y)$



Ingenieurmathematik III

2. Beiblatt

Übersicht Kurven- und Oberflächenintegrale

Wege	Flächen
Ein Weg ist eine Abbildung $[a, b] \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^3$. Den Graphen $\{\vec{\gamma}(t) \mid t \in [a, b]\}$ nennt man Kurve C .	Eine Fläche ist eine Abbildung $D \ni (u, v) \mapsto \vec{\gamma}(u, v) \in \mathbb{R}^3$. Den Graphen $\{\vec{\gamma}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$ nennt man Flächenstück Ω .
Integral über ein Skalarfeld f (Kurvenintegral 1. Art)	Integral über ein Skalarfeld f (Oberflächenintegral 1. Art)
$\int_C f \, ds = \int_{t=a}^{t=b} f(\vec{\gamma}(t)) \underbrace{\ \dot{\vec{\gamma}}(t)\ }_{*} \, dt$ * = Länge des Tangentialvektors. Speziell mit $f = 1$: Länge der Kurve C.	$\iint_{\Omega} f \, dO = \iint_D f(\vec{\gamma}(u, v)) \underbrace{\ \vec{\gamma}_u(u, v) \times \vec{\gamma}_v(u, v)\ }_{*} \, d(u, v)$ * = Fläche des durch die Tangentialvektoren aufgespannten Parallelogramms. Speziell mit $f = 1$: Inhalt des Flächenstückes Ω.
Integral über ein Vektorfeld $\vec{F}$ (Kurvenintegral 2. Art)	Integral über ein Vektorfeld $\vec{F}$ (Oberflächenintegral 2. Art)
$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{t=t_0}^{t=t_f} \underbrace{\vec{F}(\vec{\gamma}(t))^T \dot{\vec{\gamma}}(t)}_{*} \, dt$ * = Projektion des Vektorfeldes $\vec{F}$ in Tangentialrichtung	$\iint_{\Omega} \vec{F} \, dO = \iint_D \underbrace{\vec{F}(\vec{\gamma}(u, v))^T (\vec{\gamma}_u(u, v) \times \vec{\gamma}_v(u, v))}_{*} \, d(u, v)$ * = Projektion des Vektorfeldes $\vec{F}$ in Richtung des Normalenvektors



Ingenieurmathematik III

3. Beiblatt

Trennung der Variablen

Rechenschema:

Anfangswertproblem $y' = f(x) \cdot g(y)$, $y(x_0) = y_0$

f stetig in einem Intervall I , g stetig in einem Intervall J .

1. Schritt Sämtliche Nullstellen $\eta \in J$ von g bestimmen.
 $y(x) = \eta$ ist jeweils eine spezielle (konstante) Lösung.

2. Schritt Trennung der Variablen in Intervall $\tilde{J} \subseteq J$ mit $g(y) \neq 0$:

y, dy nach links und x, dx nach rechts

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

3. Schritt Ist $g(y_0) \neq 0$, dann jede Seite integrieren

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

Das ist die Lösung des Anfangswertproblems in impliziter Darstellung. Wenn möglich nach $y(x)$ auflösen.

- Beachte.
1. Lösung existiert nur in den Teilintervallen von J in denen $g(y) \neq 0$.
 2. EE- Satz. Ist $g(y)$ differenzierbar in einer Umgebung von y_0 , dann ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig.

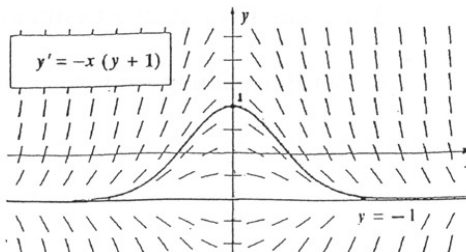
Beispiel $y' = -x(y+1)$, $y_0 = 1$

$$\int_1^y \frac{dy}{y+1} = -\int_0^x x dx \Rightarrow$$

$$\ln|y+1| - \ln|2| = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$$

$$y = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} - 1.$$

Spezielle konstante Lösung: $y = -1$



Die skalare lineare DGL 1. Ordnung

Rechenschema:

Anfangswertproblem $y' + a(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$

a und f stetig in einem Intervall I .

1. Schritt Allgemeine Lösung der homogenen DGL bestimmen

$$y_h(x) = ce^{-A(x)}, \quad c \in \mathbf{R} \text{ beliebig und } A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$$

2. Schritt Spezielle Lösung der inhomogenen DGL bestimmen

$$y_s(x) = c(x)e^{-A(x)} \quad \text{mit} \quad c(x) = \int_{x_0}^x f(t)e^{A(t)} dt$$

3. Schritt Lösung des Anfangswertproblems ist $y = y_h + y_s$, d.h.

$$y(x) = \underbrace{y_0 e^{-A(x)}}_{\text{Lösung zu } f(x)=0} + \underbrace{c(x)e^{-A(x)}}_{\text{Lösung zu } y_0=0}$$

Lösung zu $f(x)=0$
Zero input response

Lösung zu $y_0=0$
Zero state response

Beachte.

1. Struktur der Lösung: Allgem. Lösung inhom.DGL =
allgem.Lösung der hom.DGL + spezielle Lösung der inhom.DGL
2. Lösung existiert für alle Anfangswerte $y_0 \in \mathbf{R}$ und alle $x \in I$
3. Lösung ist eindeutig bestimmt für jeden Anfangswert
4. Zur Berechnung sind zwei bestimmte Integrale auszuwerten